

ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИИ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ

УДК 537.311.5:621.365.3

[https://doi.org/10.18503/2311-8318-2017-4\(37\)-53-60](https://doi.org/10.18503/2311-8318-2017-4(37)-53-60)

Ильгачёв А.Н.

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

**УЧЕТ ПРОВОДИМОСТИ БОКОВОЙ СТЕНКИ И НЕОДНОРОДНОСТИ ПРОВОДИМОСТИ СРЕДЫ
ВАННЫ КРУГЛЫХ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ РУДНО-ТЕРМИЧЕСКИХ ПЕЧЕЙ**

С использованием результатов анализа технологических процессов, происходящих в ваннах рудно-термических печей, обосновано применение моделей с двухслойно-однородной по проводимости в вертикальном или горизонтальном направлении среды ванн многоэлектродных круглых печей при расчете их электрического поля. Для предложенных структур среды ванны получены аналитические решения уравнения Лапласа с применением аналитико-численного метода, основанного на комбинации методов эквивалентных источников, зеркальных отражений, суперпозиции, разделения переменных и наименьших квадратов. Функция, определяющая потенциал электрического поля ванны, находится как сумма произведений, каждое из которых представлено вещественной функцией, характеризующей распределение потенциала электрического поля в расчетном режиме холостого хода ванны для одного из электродов печи, и его током в комплексной форме. В свою очередь функция, характеризующая распределение потенциала электрического поля ванны в расчетном режиме холостого хода для одного из электродов, находится как сумма гармонических функций. Часть из этих функций определяет распределение потенциала электрического поля источников в расчетном режиме холостого хода бесконечной в радиальном направлении ванны с однородной по проводимости средой. Другая часть функций учитывает влияние боковой стенки на электрическое поле источников в ванне с однородной по проводимости средой, а третья – влияние неоднородности проводимости среды ванны. Электрические поля для всех расчетных режимов холостого хода ванны определяются одной и той же системой источников, значения токов которых отличаются для различных режимов холостого хода.

Ключевые слова: круглая ванна печи, двухслойно-однородная модель, уравнение Лапласа, аналитико-численный метод, метод разделения переменных, метод наименьших квадратов.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость интенсификации работы и повышения энергетической эффективности действующих рудно-термических печей (РТП), а также совершенствования методов выбора оптимальных параметров и рациональных режимов вновь проектируемых печей сохраняет актуальность исследования электрических полей их ванн. Определенными преимуществами в этих исследованиях обладают методы математического моделирования. В настоящее время все большее распространение получают численные методы моделирования электрических полей и параметров схем замещения ванн электродных печей [1-5]. Вместе с тем сохраняют свои достоинства аналитические методы моделирования. В данной статье предложены аналитические решения, полученные с помощью аналитико-численного метода [6], для уравнения Лапласа, описывающего электрическое поле в ванне многоэлектродных круглых печей.

При допущениях отсутствия дуг и пренебрежении поверхностным эффектом электрическое поле в круглой ванне многоэлектродных печей является квазистационарным, потенциальным и описывается уравнением

$$\operatorname{div}(-\gamma \operatorname{grad} \phi) = 0,$$

где ϕ – скалярный потенциал в комплексной форме; γ – удельная проводимость среды ванны, зависящая от ряда факторов и являющаяся функцией пространственных координат.

Закономерности поведения удельной проводимости γ материалов ванны являются результатом взаи-

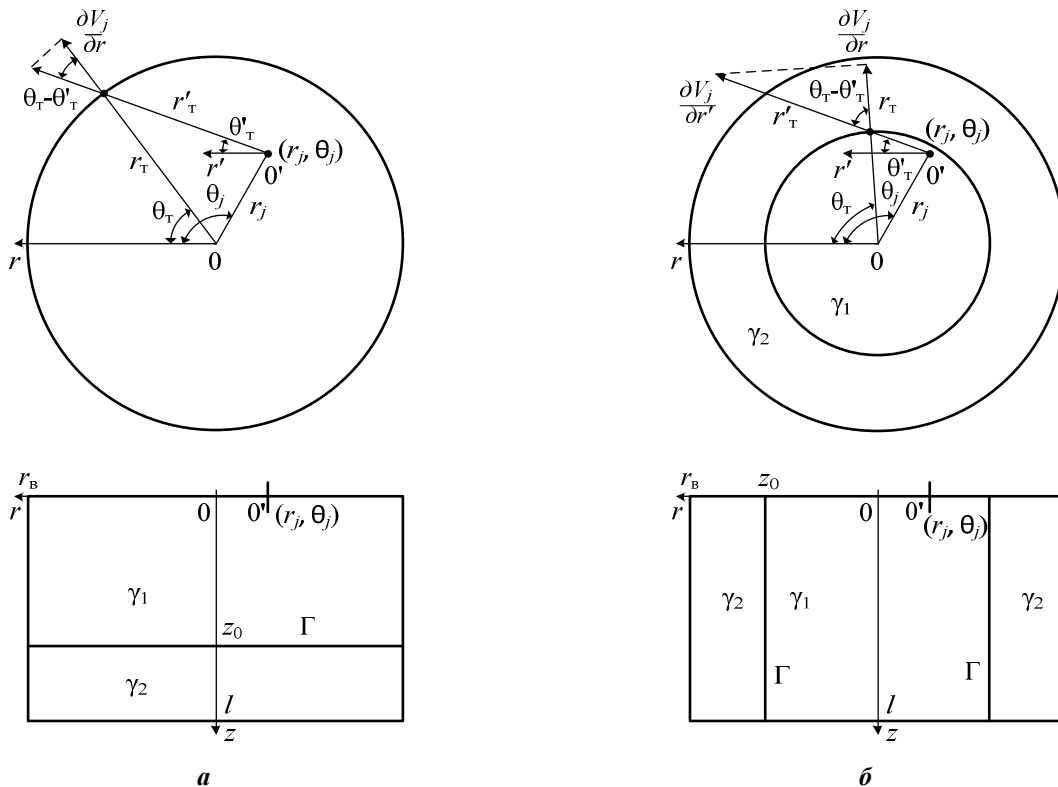
модействия электромагнитного и теплового полей, поля движения масс и физико-химической кинетики процесса. Эти обстоятельства усложняют решение задачи расчета электрического поля. Его можно значительно упростить, если аппроксимировать электрическую проводимость так, чтобы среда ванны была представлена областями, в пределах каждой из которых проводимость имеет постоянное значение.

В ванне многих круглых рудно-термических печей наибольшее изменение удельной проводимости материалов происходит в вертикальном направлении и (или) в радиальном направлении от оси печи. Проводимости материалов разных областей ванны отличаются друг от друга на несколько порядков. Поэтому с хорошим приближением к её реальным структурам учет изменения удельной проводимости может быть произведён разбиением среды ванн на зоны (слои), границы между которыми выражены достаточно чётко и в пределах каждой из которых удельная проводимость имеет постоянное значение. При этом в каждой из них электрическое поле описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

С достаточной для практики точностью расчётная модель электрического поля ванны фосфорных печей можно представить в виде слоёв углеродистой и шлаковой зон (см. **рисунок, а**), расположенных один над другим, удельная проводимость которых отличается примерно в 2 раза [7], а на границе их раздела Γ задаётся условие непрерывности линий тока

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2, \\ \gamma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \gamma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}. \end{cases}$$



Основные обозначения, система координат двухслойно-однородных модели по проводимости среды ванны в радиальном (а) и вертикальном (б) направлении

В ванне многоэлектродных печей удельная объемная мощность распределяется резко неравномерно. Наибольшие значения удельная мощность имеет в областях, расположенных вблизи рабочих поверхностей электродов [8]. Для значений диаметра распада электродов, характерных для действующих печей в областях между соседними электродами, удельная мощность изменяется незначительно. По мере удаления от электродов к боковой стенке значения удельной объемной мощности резко уменьшаются. Общие закономерности изменения температуры материалов ванны имеют подобный характер. Известно, что удельная электрическая проводимость расплавленных шлаков увеличивается с ростом температуры [9]. Поэтому наибольшие значения электрической проводимости среды ванны будет иметь в «горячей» области, в которой располагаются электроды. По мере удаления от неё в направлении боковой стенки значения проводимости материалов резко уменьшаются. С учетом этих особенностей расчетная модель может быть представлена двумя слоями в виде соосных сплошного и полого цилиндров (см. рисунок, б). На поверхности границы их раздела Γ задано условие непрерывности линий тока

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2, \\ \gamma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \gamma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r}. \end{cases}$$

Электрическая проводимость материалов электродов и расплава (металла) РТП значительно превосходит проводимость шлака и шихты. Это позволяет электрическое поле в средах с невысокой проводимостью рассчитывать независимо от электрического поля внутри электродов и расплава. В этом случае на поверхностях

электродов и расплава задаются граничные условия для скалярного потенциала $\phi_{\alpha i} = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\phi(r, \theta, l) = 0$. На верхней границе верхнего слоя или слоёв ($z = 0$) задается условие второго рода $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$.

С использованием распределений потенциала электрического поля ванны в расчетных режимах холостого хода [10] распределение потенциала электрического поля в слоях среды ванны многоэлектродной печи может быть представлено

$$\phi_1(r, \theta, z) = \frac{1}{\gamma_1 l} \sum_{i=1}^m I_{\alpha i} F_{x.x.1}^{(i)}(r^*, \theta, z^*), \quad (1)$$

$$\phi_2(r, \theta, z) = \frac{1}{\gamma_2 l} \sum_{i=1}^m I_{\alpha i} F_{x.x.2}^{(i)}(r^*, \theta, z^*), \quad (2)$$

где m – количество электродов печи; $I_{\alpha i}$ – ток i -го электрода в комплексной форме; $F_{x.x.1}^{(i)}(r^*, \theta, z^*)$, $F_{x.x.2}^{(i)}(r^*, \theta, z^*)$ – вещественные безразмерные функции распределения потенциала соответственно в первом и втором слоях в расчетном режиме холостого хода ванны для i -го электрода.

Для того чтобы расчет электрического поля ванны печей с различным числом и расположением электродов производить по одному и тому же алгоритму в аналитико-численном методе, обобщенные функции распределения потенциала $F_{x.x.1}^{(i)}(r^*, \theta, z^*)$, $F_{x.x.2}^{(i)}(r^*, \theta, z^*)$ представляются в виде сумм функций

$$F_{x,x,1}^{(i)}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{j=1}^{N_{\text{ист}}} K_{x,x,j}^{(i)} F_{1j}(r^*, \theta, z^*);$$

$$F_{x,x,2}^{(i)}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{j=1}^{N_{\text{ист}}} K_{x,x,j}^{(i)} F_{2j}(r^*, \theta, z^*),$$

где $F_{1j}(r^*, \theta, z^*)$, $F_{2j}(r^*, \theta, z^*)$ – обобщенные функции распределения потенциала электрического поля j -го источника тока соответственно в первом и втором слоях ванны; $K_{x,x,j}^{(i)}$ – ток j -го источника в режиме холостого хода ванны для i -го электрода;

$N_{\text{ист}} = m \sum_{k=0}^t (m-1)^k$ – общее количество источников тока, создающих электрическое поле в ванне; t – количество отражений основного источника тока одного электрода при решении вспомогательной задачи учета взаимного влияния электродов друг на друга [6].

При таком представлении решения уравнения Лапласа электрические поля для всех расчетных режимов холостого хода ванны определяются одной и той же системой источников, значения токов которых отличаются для различных режимов холостого хода.

ДВУХСЛОЙНО-ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ ПО ПРОВОДИМОСТИ СРЕДЫ ВАННЫ В РАДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Обобщенные функции распределения потенциала электрического поля j -го источника тока в слоях ванны в этом случае представим (см. рисунок, а)

$$F_{1j}(r^*, \theta, z^*) = V_j(r^*, \theta, z^*) + U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*) + U_{1j}(r^*, \theta, z^*) = W_j(r^*, \theta, z^*) + U_{1j}(r^*, \theta, z^*),$$

$$F_{2j}(r^*, \theta, z^*) = V_j(r^*, \theta, z^*) + U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*) + U_{2j}(r^*, \theta, z^*) = W_j(r^*, \theta, z^*) + U_{2j}(r^*, \theta, z^*),$$

где $V_j(r^*, \theta, z^*)$ – обобщенная функция распределения потенциала электрического поля j -го источника тока в однородной и бесконечной в радиальном направлении ванне [6]; $U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*)$ – функция, учитывающая влияние боковой стенки на электрическое поле j -го источника тока в однородной среде; $U_{1j}(r^*, \theta, z^*)$, $U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$ – функции, учитывающие влияние проводимости слоев ванны.

Будем искать функции $U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*)$, $U_{1j}(r^*, \theta, z^*)$, $U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$ в виде сумм частных решений уравнения Лапласа, полученных методом разделения переменных в цилиндрической системе координат [11]

$$U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jnk} \cos(n\theta) \times \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] I_n(k_{nk} r^*);$$

$$U_{1j}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{jnk} \cos(n\theta) \times J_n(q_{nk} r^*) \text{ch}(q_{nk} z^*);$$

$$U_{2j}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jnk} \cos(n\theta) \times J_n(q_{nk} r^*) \text{sh}[q_{nk}(1-z^*)],$$

где $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка; $k_{nk} = \sqrt{n^2 + \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]^2}$;

$J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка;

$q_{nk} = \frac{\lambda_{nk}}{r_b^*}$; λ_{nk} – k -й положительный корень среди корней,

расположенных в порядке возрастания, уравнения:

а) для проводящей стенки $J_n(x) = 0$;

б) для непроводящей стенки $J'_n(x) = 0$.

Исходя из выбранных представлений функций $U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*)$, $U_{1j}(r^*, \theta, z^*)$ и $U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$, граничное условие на боковой стенке будут выглядеть следующим образом:

а) для проводящей стенки

$$U_{\text{ст}j}(r_b^*, \theta, z^*) = -V_j(r_b^*, \theta, z^*);$$

б) для непроводящей стенки

$$\frac{\partial U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*} = - \frac{\partial V_j(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*},$$

или с учетом (6):

а) для проводящей стенки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jnk} \cos(n\theta) I_n(k_{nk} r_b^*) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] = -V_j(r_b^*, \theta, z^*);$$

б) для непроводящей стенки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{jnk} \cos(n\theta) k_{nk} I'_n[k_{nk} r_b^*] \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] = - \frac{\partial V_j(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*},$$

где $I'_n(x)$ – производная модифицированной функции Бесселя первого рода n -го порядка.

Разложим в двойные ряды Фурье функции $V_j(r_b^*, \theta, z^*)$ и $\frac{\partial V_j(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*}$, на интервалах изменения переменных $0 \leq z^* \leq 1$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$ в системе ортогональных функций $\cos(n\theta) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right]$ ($n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots$)

$$V_j(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{jnk} \cos(n\theta) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial V(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D'_{jnk} \cos(n\theta) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right], \quad (12)$$

$$\text{где } D_{j0,k} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 V(r_b^*, \theta, z^*) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] d\theta dz^*,$$

$$D_{jnk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 V(r_b^*, \theta, z^*) \cos(n\theta) \times \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] d\theta dz^*,$$

$$D'_{j0,k} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial V(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*} \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] d\theta dz^*,$$

$$D'_{jnk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial V(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*} \cos(n\theta) \times \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] d\theta dz^*.$$

Подставляя (11) и (12) соответственно в (9) и (10), получим:

а) для проводящей стенки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jnk} \cos(n\theta) I_n(k_{nk} r^*) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{jnk} \cos(n\theta) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right]; \quad (13)$$

б) для непроводящей стенки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jnk} \cos(n\theta) I'_n(k_{nk} r_b^*) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D'_{jnk} \cos(n\theta) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi z^*}{2}\right]. \quad (14)$$

Из равенств (13) и (14) находим выражения для вычисления коэффициентов A_{jnk} :

$$A_{jnk} = - \frac{D_{jnk}}{I_n(k_{nk} r_b^*)}; \quad (15)$$

$$A_{jnk} = - \frac{D'_{jnk}}{I'_n(k_{nk} r_b^*)}. \quad (16)$$

Граничные условия непрерывности тока на поверхности Γ раздела слоёв 1 и 2 (см. **рисунок, а**)

$$\begin{cases} \varphi_1(r, \theta, z_0) = \varphi_2(r, \theta, z_0), \\ \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0}. \end{cases}$$

С учётом (1)-(8)

$$\begin{aligned} \gamma_2 U_{1j}(r^*, \theta, z_0^*) - \gamma_1 U_{2j}(r^*, \theta, z_0^*) &= \\ &= (\gamma_1 - \gamma_2) W_j(r^*, \theta, z_0^*), \\ \frac{\partial U_{1j}(r^*, \theta, z^*)}{\partial z^*} \Big|_{z^*=z_0^*} &= \frac{\partial U_{2j}(r^*, \theta, z^*)}{\partial z^*} \Big|_{z^*=z_0^*}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим (7)-(6) и их производные по z^* в (17)

$$\begin{cases} \gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) \operatorname{ch}(q_{nk} z_0^*) - \\ - \gamma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) \times \\ \times \operatorname{sh}[q_{nk}(1-z_0^*)] = (\gamma_1 - \gamma_2) W_j(r^*, \theta, z_0^*), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) q_{nk} \operatorname{sh}(q_{nk} z_0^*) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) q_{nk} \times \\ \times \operatorname{ch}[q_{nk}(1-z_0^*)] = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из последнего уравнения системы (18) следует

$$C_{jnk} = -B_{jnk} \frac{\operatorname{sh}(q_{nk} z_0^*)}{\operatorname{ch}[q_{nk}(1-z_0^*)]}. \quad (19)$$

Разложим в ряд Фурье-Бесселя функцию $W_j(r^*, \theta, z_0^*)$ на интервалах изменения переменных $0 \leq r^* \leq r_b^*$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$ в системе ортогональных функций $\cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*)$ с весовой функцией r^*

$$W_j(r^*, \theta, z_0^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*), \quad (20)$$

где:

а) для проводящей стенки

$$E_{j0,k} = - \frac{1}{\pi [r_b^* J_1(q_{0,k})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_b^*} r^* W(r^*, \theta, z_0^*) J_0(q_{0,k} r^*) dr^*,$$

$$E_{jnk} = - \frac{2}{\pi [r_b^* J_{n+1}(k_{nk})]^2} \int_0^{r_b^*} r^* W(r^*, \theta, z_0^*) \times \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) dr^*;$$

б) для непроводящей стенки

$$E_{j0,k} = -\frac{1}{\pi \left[r_b^* q_{0,k} J_0(q_{0,k}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_b^*} r^* W(r^*, \theta, z_0^*) \times \\ \times J_0(q_{0,k} r^*) dr^*,$$

$$E_{jnk} = -\frac{2}{\pi \left[r_b^* J_n(q_{nk}) \right]^2} \left[1 - \left(\frac{n}{q_{nk}} \right)^2 \right] \times \\ \times \int_0^{r_b^*} r^* W(r^*, \theta, z_0^*) \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) dr^*.$$

Подставим (19) и (20) в первое уравнение системы (18)

$$\gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) \operatorname{ch}[q_{nk} z_0^*] - \\ - \gamma_1 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{jnk} \frac{\operatorname{sh}(k_q z_0^*)}{\operatorname{ch}[k_q (1 - z_0^*)]} \cos(n\theta) J_n(k_q r^*) \times \\ \times \operatorname{sh}[k_q (1 - z_0^*)] = (\gamma_1 - \gamma_2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{jnk} \cos(n\theta) J_0(k_q r^*).$$

Из последнего равенства следует

$$B_{jnk} = E_{jnk} \times \\ \times \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_2 \operatorname{ch}(q_{nk} z_0^*) + \gamma_1 \operatorname{sh}[q_{nk} (1 - z_0^*)] \operatorname{th}[q_{nk} (1 - z_0^*)]}.$$
 (21)

ДВУХСЛОЙНО-ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ ПО ПРОВОДИМОСТИ
СРЕДЫ ВАННЫ В ВЕРТИКАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Распределение потенциала электрического поля j -го источника тока в слоях ванны в этом случае (см. **рисунк, б**) представляется функциями

$$F_{1j}(r^*, \theta, z^*) = V_j(r^*, \theta, z^*) + U_{1j}(r^*, \theta, z^*),$$
 (22)

$$F_{2j}(r^*, \theta, z^*) = V_j(r^*, \theta, z^*) + \\ + U_{\text{сг}j}(r^*, \theta, z^*) + U_{2j}(r^*, \theta, z^*).$$
 (23)

Так же как и в предыдущем случае, будем искать эти функции в виде сумм частных решений уравнения Лапласа, полученных методом разделения переменных в цилиндрической системе координат.

$$U_{\text{сг}j}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jnk} \cos(n\theta) \times \\ \times I_n(k_{nk} r^*) \cos \left[(2k+1) \frac{\pi z^*}{2} \right],$$
 (24)

$$U_{1j}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{jnk} \cos(n\theta) \times \\ \times I_n(k_{nk} r^*) \cos \left[(2k+1) \frac{\pi z^*}{2} \right],$$
 (25)

$$U_{2j}(r^*, \theta, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jnk} \cos(n\theta) J_n(q_{nk} r^*) \times \\ \times \left[\operatorname{th}(q_{nk}) \operatorname{ch}(q_{nk} z^*) - \operatorname{sh}(q_{nk} z^*) \right].$$
 (26)

Исходя из выбранных представлений функций $U_{\text{сг}j}(r^*, \theta, z^*)$ и $U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$, граничное условие на боковой стенке:

а) для проводящей стенки

$$U_{\text{сг}j}(r_b^*, \theta, z^*) = -V_j(r_b^*, \theta, z^*);$$

б) для непроводящей стенки

$$\frac{\partial U_{\text{сг}j}(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*} = - \frac{\partial V_j(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_b^*}.$$

Поэтому коэффициенты A_{jnk} функции $U_{\text{сг}j}(r^*, \theta, z^*)$ вычисляются аналогично предыдущему случаю по (19) или (20).

Граничные условия непрерывности тока на поверхности Γ раздела слоёв 1 и 2 (см. **рисунк, б**)

$$\begin{cases} \varphi_1(r_0, \theta, z) = \varphi_2(r_0, \theta, z), \\ \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1(r, \theta, z)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2(r, \theta, z)}{\partial r} \Big|_{r=r_0}. \end{cases}$$
 (27)

С учётом (1)-(3'), (22), (23), подставим (24)-(26) и их производные по r^* в (27)

$$\begin{cases} \gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{jnk} \cos(n\theta) I_n(k_{nk} r_0^*) \times \\ \times \cos \left[(2k+1) \frac{\pi z^*}{2} \right] - \gamma_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{jil} \cos(i\theta) \times \\ \times J_i(q_{il} r_0^*) \left[\operatorname{th}(q_{il}) \operatorname{ch}(q_{il} z^*) - \operatorname{sh}(q_{il} z^*) \right] = \\ = (\gamma_1 - \gamma_2) V_j(r_0^*, \theta, z^*) - \gamma_1 U_{\text{сг}j}(r_0^*, \theta, z^*), \\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_i(2i+1) \frac{\pi}{2} I_0 \left[(2i+1) \frac{\pi r_0^*}{2} \right] \times \\ \times \cos \left[(2i+1) \frac{\pi z^*}{2} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{jil} \cos(i\theta) \times \\ \times J_i(q_{il} r_0^*) \left[\operatorname{th}(q_{il}) \operatorname{ch}(q_{il} z^*) - \operatorname{sh}(q_{il} z^*) \right] = \\ = \frac{\partial U_{\text{сг}j}(r^*, \theta, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_0^*}. \end{cases}$$
 (28)

Ограничим количества членов рядов для функций $U_{1j}(r^*, \theta, z^*)$ и $U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$:

N_1, N_2 – максимальные значения индексов членов ряда для функции $U_{1j}(r^*, \theta, z^*)$ по n и по k соответственно;

N_3, N_4 – максимальные значения индексов членов ряда для функции $U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$ по n и по k соответственно.

Составим невязки для уравнений системы (28)

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_1 &= \gamma_2 \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} B_{jnk} \cos(n\theta) I_n(k_{nk} r_0^*) \times \\ &\times \cos \left[(2k+1) \frac{\pi z^*}{2} \right] - \gamma_1 \sum_{i=0}^{N_3} \sum_{t=1}^{N_4} C_{jit} \cos(i\theta) \times - \\ &\times J_i(q_{it} r_0^*) \left[\text{th}(q_{it}) \text{ch}(q_{it} z^*) - \text{sh}(q_{it} z^*) \right] - \\ &-(\gamma_1 - \gamma_2) V_j(r_0^*, \theta, z^*) + \gamma_1 U_{\text{ст}j}(r_0^*, \theta, z^*), \\ \delta_2 &= \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} B_{jnk} \cos(n\theta) I'_n(k_{nk} r_0^*) \times \\ &\times \cos \left[(2k+1) \frac{\pi z^*}{2} \right] - \sum_{i=0}^{N_3} \sum_{t=1}^{N_4} C_{jit} \cos(i\theta) \times \\ &\times J'_i(q_{it} r_0^*) \left[\text{th}(q_{it}) \text{ch}(q_{it} z^*) - \text{sh}(q_{it} z^*) \right] - \\ &-\frac{\partial U_{\text{ст}}(r^*, z^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=r_0^*}. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Применим метод наименьших квадратов для определения коэффициентов $B_{jnk}, n=0,1,\dots,N_1, k=0,1,\dots,N_2, C_{jit}, i=1,\dots,N_3, t=0,1,\dots,N_4$, согласно которому значения этих коэффициентов выбираются так, чтобы сумма квадратов невязок (29) в интегральном смысле по площади поверхности границы Γ , разделяющей слои 1 и 2, была минимальной

$$S = \int_{S_0^*} (\delta_1^2 + \delta_2^2) ds^* \rightarrow \min.$$

Условием минимума суммы квадратов невязок является равенство нулю частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial B_{pl}} = 2 \int_{S_0^*} \left(\delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial B_{pl}} + \delta_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial B_{pl}} \right) ds^* = 0,$$

$$p = 0, 1, \dots, N_1, l = 0, 1, \dots, N_2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial C_{qs}} = 2 \int_{S_0^*} \left(\delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial C_{qs}} + \delta_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial C_{qs}} \right) ds^* = 0,$$

$$q = 1, 2, \dots, N_3, s = 1, 2, \dots, N_4.$$

Подставив в последние уравнения выражения для невязок из (29) и их производных по искомым коэффициентам получим систему линейных алгебраических уравнений порядка $(N_1 + 1)(N_2 + 1) + (N_3 + 1)N_4$ со следующей структурой:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} a_{plnk} B_{jnk} + \sum_{i=0}^{N_3} \sum_{t=1}^{N_4} b_{plit} C_{jit} &= e_{jpl}, \\ \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} c_{qsnk} B_{jnk} + \sum_{i=0}^{N_3} \sum_{t=1}^{N_4} d_{qsit} C_{jit} &= g_{qs}, \\ (p &= 0, 1, 2, \dots, N_1; l = 0, 1, \dots, N_2; \\ q &= 0, 1, \dots, N_3; s = 1, \dots, N_4), \end{aligned} \right. \quad (30)$$

где коэффициенты $a_{plnk}, b_{plit}, c_{qsnk}, d_{qsit}$ матрицы системы определяются аналитически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, распределение потенциала электрического поля в ванне многоэлектродной круглой печи со слоисто-однородной структурой по проводимости среды в радиальном или вертикальном направлении может быть представлено суммами гармонических функций, расчет которых производится по формулам (1)-(3), (4), (5), (22), (23). Часть из этих функций определяет распределение потенциала электрического поля источников тока в однородной по проводимости и бесконечной в радиальном направлении среде ванны. Другая часть учитывает влияние боковой стенки на электрическое поле источников в однородной по проводимости среде ванны, а третья – влияние неоднородности проводимости среды ванны.

Электрическое поле одного источника тока в ванне многоэлектродной круглой печи со слоисто-однородной структурой по проводимости в радиальном направлении среды ванны и с боковой стенкой, выполненной из проводящих материалов, представляется комбинациями функций $V_j(r^*, \theta, z^*), U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*), U_{1j}(r^*, \theta, z^*), U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$, три последние из которых даются рядами

(6)-(8), где коэффициенты $A_{jnk}, B_{jnk}, C_{jnk}$ определяются формулами (15), (19) и (21). Если боковая стенка выполнена из непроводящих материалов, функции $U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*), U_{1j}(r^*, \theta, z^*), U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$ также определяются рядами (6)-(8), где коэффициенты $A_{jnk}, B_{jnk}, C_{jnk}$ рассчитываются по формулам (16), (19) и (21).

Электрическое поле одного источника тока в ванне многоэлектродной круглой печи со слоисто-однородной структурой по проводимости в вертикальном направлении среды ванны и с боковой стенкой, выполненной из проводящих материалов, представляется комбинациями функций $V_j(r^*, \theta, z^*), U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*), U_{1j}(r^*, \theta, z^*), U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$, три последние из которых даются рядами (24)-(26), где коэффициенты A_{jnk} определяются по (15), а коэффициенты B_{jnk}, C_{jnk} , решением системы уравнений (30). Если боковая стенка выполнена из непроводящих материалов, функции $U_{\text{ст}j}(r^*, \theta, z^*), U_{1j}(r^*, \theta, z^*), U_{2j}(r^*, \theta, z^*)$ также находятся с помощью рядов (24)-(26), где коэффициенты A_{jnk} определяются по формуле (16), а коэффициенты B_{jnk}, C_{jnk} – решением системы уравнений (30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетнев А.А., Русаков М.Р., Талалов В.А. Численное моделирование электрического поля и сопротивления ванны многошлаковой руднотермической печи // Компьютерное моделирование при оптимизации технологических процессов электротермических производств: сб. тр. науч.-техн. совещания «Электротермия – 2000». СПб.: Изд-во СПбГТИ, 2000. С. 317-323.

2. Lehner G. Electromagnetic field theory for engineers and physicists. 1st Edition. Springer, 2008. 659 p.
3. Zhu Yu, Cangellaris A.C. Multigrid finite element methods for electromagnetic field modeling. Wiley-IEEE Press, 2006. 408 p.
4. Li L., Wang E.Z. A hybrid of finite analytic and multi-grid method for calculating electric field distribution // IEEE transactions on magnetics. 2006. Vol. 42, publ. 4, pp. 551-554.
5. Qu Zheng-Xian, Liu Zhi-Feng, Wang, Xiao-Hong. Finite Analytic Numerical Method for Solving Two-Dimensional Quasi-Laplace Equation // Numerical methods for partial differential equations. 2014. Vol. 30, publ. 6, pp. 1755-1769.
6. Ильгачев А.Н. Аналитико-численный метод расчета характеристик электрического поля ванны многоэлектродных печей // Вестник Чувашского университета. 2016. №3. С. 36-49.
7. Ершов В.А., Данцис Я.Б., Жилов Г.М. Теоретические основы химической электротермии. Л.: Химия, 1978. 184 с.
8. Миронов Ю.М., Тарасов В.А. Аналитический расчёт электрических полей и сопротивлений ванн электрических печей // Изв. вузов. Электромеханика. 1975. № 11. С. 1174-1189.
9. Френкель Я.И. Кинетика теории жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1945. 424 с.
10. Ильгачев А.Н. Математические модели для расчета электрического поля ванн многоэлектродных руднотермических печей // Электричество. 2017. № 4. С. 62-65.
11. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964. 773 с.

Поступила в редакцию 12 июля 2017 г.

INFORMATION IN ENGLISH

ACCOUNTING OF SIDEWALL INFLUENCE AND MEDIUM CONDUCTANCE NON-UNIFORMITY IN THE MULTI-ELECTRODE ROUND FURNACE BATH

Anatolii N. Ilgachev

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, Department of automatic electrical installations and systems, Energy and Electrical engineering faculty, Chuvash State University, Cheboksary, Russia. E-mail: anikil47@mail.ru

Taking into account the analysis of the process technology features occurring in the ore-thermal furnace bath, the author justified the application of two-layer homogeneous models by electric conductance of medium in the multi-electrode round furnace bath in the vertical or horizontal direction used during calculating electric field. Laplace's equation analytical decisions were obtained for the offered bath medium structures by means of analytical numerical method based on the combination of methods: equivalent source method, mirror reflection method, superposition method, variable separation method and the least-squares method. The function that determines the bath electrical field potential is calculated as a sum of harmonic functions. One part of them determines the electrical field potential distribution of the sources in the bath being homogeneous by conductance and infinite in the radial direction. The other part takes into account sidewall influence upon the electric field sources in the bath with uniform medium by conductance, and the third one takes into account bath medium conductance non-uniformity. The function that determines the bath electrical field potential is calculated as a sum of productions each of which is presented by a real function characterizing electrical field potential distribution in the bath no-load rated conditions for one of the furnace electrode and by its current in the complex form. In its turn the function characterizing bath electrical field potential in the no-load rated conditions for one of the furnace electrode is calculated as a sum of harmonic functions. One part of these functions determines the electrical field potential distribution of the sources in the no-load rated conditions of the bath being infinite in the radial direction with uniform medium by conductance. The other part takes into account sidewall influence upon the electric field sources in the bath with uniform medium by conductance, and the third one – bath medium conductance non-uniformity. All the bath no-load rated conditions electrical fields are determined by the same sources system, in which currents differ for various no-load conditions.

Keywords: Round furnace bath, two-layer homogeneous model, Laplace's equation, analytical numerical method, variables separation method, least-squares method.

REFERENCES

1. Pletnev A.A., Rusakov M.R., Talalov V.A. Numerical simulations of the electric field and the resistance of ore-smelting furnace multislug bath. *Komp'yuternoe modelirovanie pri optimizatsii tekhnologicheskikh protsessov elektrottermicheskikh proizvodstv: sb. Trudov nauchno-tekhn. soveshchaniya "Elektrotermiya – 2000"* [Collection of papers of Scientific and Technical Conference «Computer modeling in the optimization of technological processes electrometallurgy Electroheat – 2000»]. St. Petersburg: San Petersburg State Technical Institute Publ., 2000, pp. 317-323. (In Russian)
2. Lehner G. Electromagnetic field theory for engineers and physicists. 1st Edition. Springer, 2008. 659 p.
3. Zhu Yu., Cangellaris A.C. Multigrid finite element methods for electromagnetic field modeling. Wiley-IEEE Press, 2006. 408 p.
4. Li L., Wang E.Z. A hybrid of finite analytic and multi-grid method for calculating electric field distribution. *IEEE transactions on magnetics*. 2006, vol. 42, publ. 4, pp. 551-554.
5. Qu Zheng-Xian, Liu Zhi-Feng, Wang, Xiao-Hong. Finite Analytic Numerical Method for Solving Two-Dimensional Quasi-Laplace Equation. Numerical methods for partial differential equations. 2014, vol. 30, publ. 6, pp. 1755-1769.
6. Ilgachev A.N. Analytical numerical method of calculating the multi-electrode furnaces bath electric field characteristics. *Vestnik Chuvashskogo universiteta* [Bulletin of the Chuvash State University]. 2016, no. 3, pp. 37-50. (In Russian)
7. Ershov V.A., Dantsis Ya.B., Zhilov G.M. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi elektrottermii* [Theoretical Foundations of Chemical electrothermy]. Leningrad, Chemistry Publ., 1978, 184 p. (In Russian)
8. Mironov Yu.M., Tarasov V.A. Analytical calculation of the electric fields and resistances of bathsof electric furnaces. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika* [Proceedings of the universities. Electro mechanics]. 1975, no. 11, pp. 1174-1189. (In Russian)
9. Frenkel Ya.I. *Kinetika teorii zhidkosti* [The kinetics of the theory of liquids]. Moscow: AN SSSR Publ., 1945, 424 p.

- (In Russian)
10. Ilgachev A.N. The mathematical model for calculating the electric field baths multielectrode ore thermal furnaces. *Elektrichestvo* [Electricity]. 2017, no. 4, pp. 62-65. (In Russian)
11. Shimoni K. *Teoreticheskaya elektrotehnika* [Theoretical electrical Engineering]. Moscow: Mir Publ., 1964, 773 p. (In Russian)
-
- Ильгачёв А.Н. Учет проводимости боковой стенки и неоднородности проводимости среды ванны круглых многоэлектродных рудно-термических печей // Электротехнические системы и комплексы. 2017. № 4(37). С. 53-60. [https://doi.org/10.18503/2311-8318-2017-4\(37\)-53-60](https://doi.org/10.18503/2311-8318-2017-4(37)-53-60)
- Ilgachev A.N. Accounting of Sidewall Influence and Medium Conductance Non-uniformity in the Multi-electrode Round Furnace Bath. *Elektrotekhnicheskie sistemy i komplekсы* [Electrotechnical Systems and Complexes], 2017, no. 4(37), pp. 53-60. (In Russian). [https://doi.org/10.18503/2311-8318-2017-4\(37\)-53-60](https://doi.org/10.18503/2311-8318-2017-4(37)-53-60)
-