УДК 517.977

К АНАЛИЗУ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ

Т.Ф. Махмудов

Ташкентский государственный технический университет
Узбекистан, г. Ташкент
tox-05@yandex.ru

Аннотация

В статье изложен алгебраический подход к анализу и синтезу многосвязных систем на основе вложения систем для обеспечения заданного характеристического числителя и знаменателя многосвязной линейной системы.

Ключевые слова: вложение систем, синтез регуляторов, проматрица, репроматрица, многосвязные системы.

THE ANALYSIS OF MULTIPLY-BASED SYSTEMS ON BASIS OF THE INVESTMENTS THEORY

T.F. Mahmudov

Tashkent State Technical University
Uzbekistan, Tashkent
tox-05@yandex.ru

Abstract

The article describes an algebraic approach to the analysis and synthesis of multiply-based systems on the basis of systems attachment theory for a given characteristic of the numerator and denominator of a multiply-linear system.

Keywords: systems attachment, the synthesis of regulators, promatrix, repromatrix, the system of multiply.

Актуальность работы

В данной статье излагается вытекающий из результатов исследований по вложению систем подход к модификации существующих методов анализа многосвязных систем.

Введение

Теория систем в современном ее понимании и теория регулирования в частности как один из основных ее разделов, с которого собственно теория систем начиналась, пережили уже два крупных этапа своего развития.

Для первого этапа теории систем характерно то, что объекты исследования представляли собой исключительно системы с одним входом и одним выходом. Такие системы называются скалярными. В западной литературе используется термин SISO-системы (SingleInputSingleOutput). Классическая теория регулирования излагалась на языке скалярных систем. Именно для таких систем получены практически все значимые результаты по устойчивости, запасам устойчивости, оценкам качества процессов, методам синтеза контуров и пр. В работах первого этапа встречаются попытки распространения основных результатов на системы с несколькими входами и выходами. Однако обобщения такого характера не обладали качественной новизной, а главное – не давали практике проектирования и исследования систем каких-либо конструктивных рецептов.

Второй этап ознаменовался тем, что системы со многими входами и выходами заняли центральное место в теоретических и прикладных работах. В литературе появились термины «многомерные системы», «многосвязные системы», «матричные системы», а в западной литературе – еще и MIMO-системы (Multi-InputMulti-Output) [1].

Матричные системы отличаются не только внешними (количественными) признаками. Для них характерны принципиально новые свойства и черты. К числу таких свойств или качественно новых сторон можно отнести, например, понятия наблюдаемости и управляемости, не использовавшиеся и не определенные для скалярных систем [2].

Одним из основных результатов по матричным (линейным) системам является теория абстрактной (канонической) реализации Р. Калмана [3, 4]. Теория направлена на решение такой проблемы, как построение внутренней структуры системы по описанию ее входного и выходного сигналов. Для скалярных систем, как известно, такой проблемы не существует. Обеспечение единственности решения задачи реализации потребовало введения двух специальных утверждений: внимание сосредотачивается только на системах с минимальной размерностью пространства состояния и все системы с минимальной размерностью пространства состояния неразличимы. Широко известные положения по наблюдаемости и управляемости систем представляют собой фрагменты этой теории. В то же время для практических приложений изначально отброшенные неминимальные реализации порой представляют гораздо больший интерес.

Другим и не менее важным результатом матричных систем является совокупный результат многих авторов по теории линейных многомерных систем [5, 6, 7], под которым подразумевается в частности развитие частотных методов анализа и синтеза.

Односвязными (простыми, просто организованными) называются динамические системы, у которых отсутствуют алгебраические особенности в виде делителей нуля и некоммутативности, каково бы при этом ни было количество входов и выходов.

В односвязных системах независимо от размерности (числа компонент) входного и выходного сигналов объемы информации на входе и выходе системы всегда совпадают. Кроме того, у односвязных систем существует взаимно однозначная связь между совокупностью сигналов вход-выход с одной стороны, и структурой оператора (отображения) с другой стороны.

Многосвязными (сложными, сложно организованными) называются системы, операторы которых имеют алгебраические особенности в виде наличия делителей нуля и/или в виде некоммутативности.

В структурном отношении многосвязные системы организованы более сложным образом. У таких систем имеет место тесное взаимодействие различных входных и выходных каналов. Возможны два характерных случая. В первом из них по выходному сигналу невозможно восстановить входной сигнал. Налицо утрата части информации. Во втором случае выходные сигналы избыточны в том смысле, что для восстановления входного сигнала можно ограничиться только определенной частью выходных сигналов. Однако определение конкретной «топологии» выходных сигналов (характера сочетания основной и дублирующей информации) в общем случае составляет, как правило, серьезную проблему [1].

Проблематика

Будем рассматривать линейные непрерывные динамические системы, поведение которых во времени t описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями в форме модели типа «вход-выход»

$$\left[A_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu} + \ldots + A_1 \frac{d}{dt} + A_0\right] y(t) = \left[B_\eta \frac{d^\eta}{dt^\eta} + \ldots + B_1 \frac{d}{dt} + B_0\right] u(t), \quad (1)$$

с матрицей размера $m \times \mu$ начальных условий

$$\left[\frac{d^{\mu-1}}{dt^{\mu-1}} y(t)\Big|_{t=0} \ldots \frac{d}{dt} y(t)\Big|_{t=0} \; y(t)\Big|_{t=0} \right],$$

либо модели типа «вход-состояние-выход»

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + \mathrm{Bu(t)}, \quad \mathrm{y(t)=Cx(t)+D(t)u(t)}, \qquad (2)$$

с n начальными условиями $x_0 = x(0) = \left[x_{0,1} \ldots x_{0,n} \right]^T$ в виде постоянного вектора. Здесь $y(t)$ € R^m – вектор выходных величин (сигналов) системы, u(t) € R^S – вектор входных величин (сигналов) системы. Кроме того, в модели (1) A_i – вещественные матрицы размера $m\times m$, B_j – вещественные матрицы размера $n\times s$, C – вещественная матрица размера $m\times n$, D – вещественная матрица размера $m\times s$. Размеры матриц указаны с учетом предположения об однозначной разрешимости уравнений (1) и (2) относительно выходной величины $y(t)$. Под входными величинами (сигналами) здесь подразумеваются как управляемые (контролируемые), так и неуправляемые (неконтролируемые) воздействия.

Каждая задача теории систем характеризуется своим набором блоков или подсистем, описываемых моделями типа (1) или (2) и соединенных в одно целое. Так, в задаче моделирования это только одна такая подсистема, в задаче регулирования две подсистемы: объект регулирования и регулятор (компенсатор, предкомпенсатор). В задаче интеграции фигурирует значительное число подсистем, включая, например, объект управления, датчики информации, устройства передачи и преобразования информации, иерархическую совокупность регуляторов, компенсаторов и предкомпенсаторов, исполнительные механизмы, устройства встроенного контроля, реконфигурации и технологических настроек [2].

Пусть система включает некоторое количество подсистем. Каждая k-я подсистема представлена парой матричных передаточных функций $F_k^u(p)$, $F_k^0(p)$ или $F_{s,k}^u(p)$ в зависимости от формы записи модели. Предполагается, что из этих матричных передаточных функций, а также из единичных и нулевых матриц подходящего размера может быть составлена некоторая (не обязательно единственная) квадратная блочная матрица, обладающая принципиальным свойством: она всегда полна, т.е. обратима. Вводя обозначение $\left[F_{ij}(p) \right]$ для указанной блочной матрицы, запишем

$$\begin{bmatrix} x_l(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = [F_{ij}(p)] \begin{bmatrix} x_{0,l} \\ \vdots \\ y_{0,q} \\ \vdots \\ u_r(t) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь l - порядковый номер подсистемы с моделью в форме (2), q - порядковый номер подсистемы независимо от формы записи модели, r - порядковый номер подсистемы, на которую действует независимое входное воздействие (управление, возмущение) [1].

Обратимая блочная матрица $[F_{ij}(p)]$, которая преобразует все начальные условия и входные воздействия системы, записанные в виде блок-столбца, во все выходные и промежуточные (вектор состояния) величины, а также во входные воздействия, называется «реверсной проблемной матрицей» или «репроматрицей».

Матрица $\Omega(p)$, обратная репроматрице, т.е. удовлетворяющая условию (4)

$$\Omega^{-1}(p)[F_{ij}(p)] = [F_{ij}(p)]\Omega^{-1}(p) = I , \quad (4)$$

называется «проблемной матрицей» или кратко «проматрицей».

Именно проматрица, составленная применительно к решаемой задаче теории систем, фигурирует в дальнейших построениях и исследованиях. Она формально представляет содержание задачи и все динамические свойства системы, компоненты (подсистемы) которой описываются моделями (1) или (2). Для получения проматрицы нет необходимости конструировать или вычислять репроматрицу. Более того, проматрица формируется непосредственно из матричных коэффициентов моделей (1) и (2).

В отличие от известных конструкций проматрица обладает более широким спектром свойств, что обеспечивает использование в задачах теории систем современных результатов общей алгебры (вложения). К таким свойствам относятся:

а) автономность представления компонентов решаемой задачи, под которыми понимаются матричные коэффициенты уравнений (1) и (2);

б) квадратность (число строк всегда совпадает с числом столбцов);

в) полнота (невырожденность) и, следовательно, возможность обращения;

г) универсальность с точки зрения решаемой задачи и формы задания компонентов системы.

Далее перейдем к конкретным конструкциям проматриц в различных задачах теории систем.

Проматрицы моделирования

Рассмотрим многосвязный стационарный линейный объект в пространстве состояний

$$\overset{*}{x} = Ax + Bu, \tag{5}$$

$$y = Cx, \tag{6}$$

где x€ R^n –вектор состояния, u€ R^S –вектор независимого входа, y€ R^m – вектор выхода, A, B, C – вещественные матрицы подходящих размеров, точкой отмечена операция дифференцирования по времени. Пара (A, B) – управляема, пара (A, C) – наблюдаема.

Перепишем уравнения (5), (6) в виде полиноминальных тождеств от оператора дифференцирования p

$$(pI_n–A)x–Bu=0, \tag{7}$$

$$y–Cx=0, \tag{8}$$

добавляя к ним формальное тождество

$$u=u. \tag{9}$$

Теперь, объединяя (7)–(9), запишем их в матричной форме:

$$\Omega_F \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{m,1} \\ u \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $$\Omega_F = \begin{bmatrix} pI_n - A & 0_{n,m} & -B \\ -C & I_m & 0_{m,s} \\ 0_{s,n} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix}, \tag{11}$$

I_i, $0_{i,j}$ – единичные и нулевые матричные блоки размеров $i\times i$ и $i\times j$ соответственно.

Блочная матрица (11) называется проматрицей моделирования для объекта, заданного в пространстве состояний тройкой постоянных матриц (A, B, C) [8].

Проматрицы регулирования

Рассмотрим теперь представление линейной системы в пространстве состояний

$$\overset{*}{x} = Ax + B\varepsilon, \tag{12}$$

$$y = Cx, \tag{13}$$

$$\varepsilon + \tilde{u} = u, \tag{14}$$

ε € R^S –вектор рассогласования.

Пусть регулятор осуществляет динамическое управление с обратной связью по выходу:

$$\overset{*}{z} = \Theta z + Vy, \qquad (15)$$

$$\tilde{u} = Gz + Ky, \qquad (16)$$

где $z \in R^q$ – вектор состояния динамического регулятора q-го порядка, $\tilde{u} \in R^S$ – его вектор выхода.

Условием замыкания уравнений (12), (13) в контуре обратной связи является удовлетворением тождества (14). Объединяя (14) и (16), перепишем уравнения (12)-(15) в виде полиноминальных уравнений

$$(pI_n - A)x - B\varepsilon = 0, \qquad (17)$$

$$y - Cx = 0, \qquad (18)$$

$$(pI_q - \Theta)z - Vy = 0, \qquad (19)$$

$$\varepsilon + Gz + Ky = u. \qquad (20)$$

Уравнения (17)-(20) можно представить, используя матричную форму

$$\begin{bmatrix} pI_n - A & 0_{n,m} & -B & 0_{n,q} \\ -C & I_m & 0_{m,s} & 0_{m,q} \\ 0_{s,n} & K & I_s & G \\ 0_{q,n} & -V & 0_{q,s} & pI_q - \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varepsilon \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{m,1} \\ u \\ 0_{q,1} \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

Блочная матрица вида

$$\Omega = \begin{bmatrix} pI_n - A & 0_{n,m} & -B & 0_{n,q} \\ -C & I_m & 0_{m,s} & 0_{m,q} \\ 0_{s,n} & K & I_s & G \\ 0_{q,n} & -V & 0_{q,s} & pI_q - \Theta \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

называется проматрицей регулирования для системы, заданной в пространстве состояний семеркой постоянных матриц (A, B, C, Θ, V, K, G) [8].

Выводы

В статье рассмотрен универсальный аппарат вложения сложных линейных динамических систем. Он сводится к построению так называемых проматриц для конкретной решаемой задачи теории систем, которые исчерпывающим образом представляют все возможные передаточные функции линейной динамической системы независимо от числа компонентов этой системы и способа их соединения

Список литературы

1. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — Калуга: Издательство Н.Ф. Бочкаре-

вой, 2006. — 720 с.

2. Красовски А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматики и технической кибернетики. — Л.: Госэнергоиздат, 1962. — 600 с.

3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 400 с.

4. Крылов В.В. Построение моделей внутренней структуры динамических систем по входо-выходным соотношениям (теория абстрактной реализации) I. Обзор // АиТ. — 1984. —№2. — С. 5-19.

5. Изерман Р. Цифровые системы управления. — М.: Мир, 1984. — 530 с.

6. Острём К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

7. Kailath T. LinearSystems: Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1980. —682c.

8. Буков В.Н., Рябченко В.Н. Вложение систем. Проматрицы // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 5. — С. 20-33.

УДК 517.977

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ

Т.Ф. Махмудов

Ташкентский государственный технический университет
Узбекистан, г. Ташкент
tox-05@yandex.ru

Аннотация

В статье изложен алгебраический подход к анализу и синтезу многосвязных систем на основе вложения систем, а также приведен пример синтеза оптимального регулятора синхронного генератора.

Ключевые слова: синтез оптимального регулятора, многосвязные системы, матрица коэффициентов, автоматический регулятор возбуждения, синхронный генератор.

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROLLER USING MATRIX METHODS

T.F. Mahmudov

Tashkent State Technical University
Uzbekistan, Tashkent
tox-05@yandex.ru